Schwingungsgleichungen für Laser mit äußeren Spiegeln und für Laser mit ungleichmäßiger Inversion

Von Dieter Röss

Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(Z. Naturforschg. **19 a**, 421—423 [1964]; eingegangen am 4. Januar 1964)

Bei Lasern mit äußeren Spiegeln ist nur ein Teil des Resonatorvolumens von aktivem Material erfüllt. Für die Berechnung des Einschwingverhaltens ist es zweckmäßig, eine solche Anordnung in einen passiven Laufzeitspeicher und in einen aktiven Verstärker zu zerlegen. Die lineare Näherung der modifizierten Schwingungsgleichungen zeigt, daß die Relaxationsperiode der Wurzel aus dem Laufzeitverhältnis proportional ist, während die Dämpfungszeit, die Schwellpumprate und die Quantendichte davon unabhängig bleibt.

Bei der Berechnung des Einstein-Koeffizienten ist nur das Volumen des aktiven Materials, bei ungleichmäßiger Inversion nur das der invertierten Zone zu berücksichtigen.

1. Festkörper-Laser mit äußeren Spiegeln

Bei den ersten Experimenten mit Lasern bildeten die verspiegelten, ebenen und parallelen Endflächen eines Rubin-Stabes einen optischen Resonator, dessen ganzes Volumen von aktivem Material erfüllt war [1, 2].

Von Collins und Kisliuk [3] wurde dann ein Rubin-Laser beschrieben, bei dem die den optischen Resonator bildenden Spiegel getrennt vom aktiven Material aufgestellt waren. Sie zeigten, daß durch Eingriffe in den Rückkopplungsweg eine Modulation des Laserstrahls und eine Erhöhung der Impulsleistung erreicht werden können. Diese Möglichkeiten und ganz allgemein die größere experimentelle Freiheit haben dazu geführt, daß heute auch bei Festkörper-Lasern weitgehend äußere Spiegel verwendet werden. Dabei ist oft nur ein kleiner Teil des Resonatorvolumens von aktivem Material erfüllt. Wir wollen zeigen, wie in einem solchen Fall das Einschwingverhalten des Lasers von seinen Abmessungen abhängt.

Das Relaxationsverhalten kann wesentlich durch komplizierte Effekte beeinflußt werden, die in der Multimode-Charakteristik optischer Resonatoren und in Sättigungserscheinungen begründet sind. Da die Theorie dieser Effekte bisher noch in den Anfängen steckt, verzichten wir auf ihre Berücksichtigung.

Wir setzen einen Ein-Moden-Laser voraus, bei dem die Wechselwirkung zwischen Inversion und Quantenzahl vollständig durch die von Dunsmuir [4], Statz und De Mars [5] und anderen angegebenen gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben wird. Unsere Ergebnisse lassen sich jedoch zwanglos auf verbesserte theoretische Ansätze, wie die von Tang, Statz und De Mars für Multi-Mode-Laser [6], anwenden. Unter speziellen experimentellen Bedingungen können daneben auch in Multimode-Lasern Relaxationsschwingungen beobachtet werden, die weitgehend dem idealen Fall des Ein-Moden-Lasers gleichen [7–9].

2. Schwingungsgleichungen für Laser mit festen Spiegeln

Für Laser, deren Resonatorvolumen ganz von aktivem, gleichmäßig invertiertem Material erfüllt ist, lauten die bekannten Schwingungsgleichungen unter Vernachlässigung der Fluoreszenz [4]:

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = W - 2\,B_{\mathrm{s}}\,n\,q\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = B_{\mathrm{s}}\,n\,q - q/t_{\mathrm{c}}\,. \tag{2}$$

Es ist

$n = n_2 - n_1$ Inversion im Resonator;

q Quantenzahl des schwingenden Mode im Resonator;

[1] T. H. Maiman, R. S. Hoskins, I. J. D'Haenens, C. K. Asawa u. V. Evtuhov, Phys. Rev. **123**, 1151 [1961].

[2] R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schawlow, W. Bond, C. G. B. Garret u. W. Kaiser, Phys. Rev., Letters **5**, 303 [1960].

[3] R. J. Collins u. P. Kisliuk, J. Appl. Phys. **33**, 2009 [1962].

[4] R. Dunsmuir, J. Electron. Control. **10**, 453 [1961].

[5] H. Statz u. G. De Mars, Quantum Electronics, herausgegeben von C. H. Townes, Columbia University Press, New York 1960.

[6] C. L. Tang, H. Statz u. G. De Mars, J. Appl. Phys. **34**, 2289 [1963].

[7] K. Gürs, Z. Naturforschg. **17 a**, 990 [1962]; **18 a**, 510 [1963].

[8] D. Röss, Frequenz **17**, 2, 61 [1963].

[9] D. Röss, Proc. I.E.E.E. **51**, 3, 468 [1963].

W Pumprate, bezogen auf n;
t_c mittlere Verweilzeit der Quanten im aktiven Material;
$B_s = \dfrac{c^3}{\tau\, 8\, \pi\, \nu^2\, \Delta\nu\, V}$ EINSTEIN-Koeffizient (wir setzen hier vereinfachend voraus, daß die Linie Rechteckform hat und daß keine Polarisationsrichtung ausgezeichnet ist).
τ Lebensdauer gegen spontane Emission;
c Lichtgeschwindigkeit im aktiven Material;
ν, $\Delta\nu$ Frequenz und Bandbreite der Fluoreszenzlinie;
V Volumen des aktiven Materials, hier identisch mit dem des Resonators.

Im eingeschwungenen Zustand ergeben sich mit $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = 0$, $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$ die Gleichgewichtswerte [4]:

$$n_0 = 1/B_s\, t_c\,, \qquad q_0 = W\, t_c/2\,. \tag{3, 4}$$

Bei einer kleinen, sprunghaften Änderung der Gleichgewichtslage ergibt (1) und (2) für die daraus resultierende Relaxationsschwingung in linearer Näherung eine exponentiell gedämpfte periodische Funktion mit der Periodendauer [4]:

$$T = 2\,\pi/\sqrt{W\, B_s}\,. \tag{5}$$

Für die Dämpfungszeit t_0, in der die Störung auf $1/e$-tel abgeklungen ist, ergibt sich [4]:

$$t_0 = 2/W\, B_s\, t_c\,. \tag{6}$$

3. Schwingungsgleichungen für Laser mit äußeren Spiegeln

In einem Gedankenexperiment wollen wir zunächst zeigen, daß bei einem Laser mit äußeren Spiegeln der Querschnitt des passiven Resonatorteils

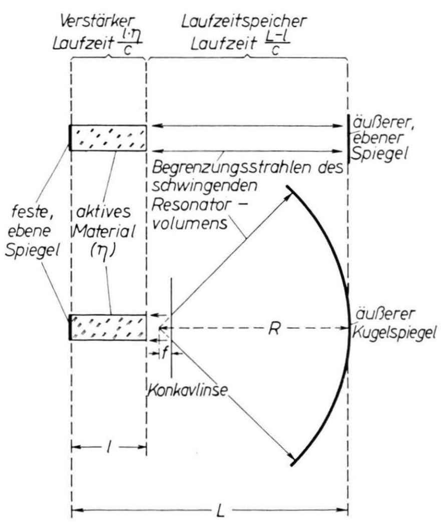

Abb. 1. Laser mit gleichem Laufzeitverhältnis bei unterschiedlichem Volumen des passiven Resonatorteils.

ohne Einfluß auf das Relaxationsverhalten ist. In Abb. 1 ist ein einseitig verspiegelter Laserstab der Länge l aufgezeichnet, der wahlweise mit zwei äußeren Spiegeln gekoppelt werden kann. Dabei soll die Länge L des Resonators jeweils gleich, das Volumen des passiven Resonatorteils jedoch unterschiedlich sein. In einem Fall ist der Querschnitt des Resonators durch Verwendung eines ebenen äußeren Spiegels überall gleich dem des aktiven Materials. Im anderen Fall wächst der Querschnitt durch Verwendung einer konfokalen Optik im passiven Resonatorteil stark an. Der aktive Resonatorteil ist in beiden Fällen identisch. Wir fassen den äußeren Resonatorteil als einen Laufzeitspeicher für die Quanten der schwingenden Mode auf, dessen Laufzeit in beiden Ausführungsformen gleich groß ist.

Die Vernichtung von Inversion bzw. Entstehung von Quanten, die in (1) und (2) durch das Glied $B_s\, n\, q$ beschrieben wird, findet nur in dem für beide Resonatoren identischen aktiven Resonatorteil statt. Dieser „Verstärker" kann durch nichts unterscheiden, aus welchen der beiden passiven Speicher die in ihn einströmenden Quanten stammen. Daher muß das Relaxationsverhalten der beiden Anordnungen bei einer Störung der Gleichgewichtslage identisch sein. Der Querschnitt des passiven Resonatorteils kann also nicht explizit in den Schwingungsgleichungen auftreten.

Der Mechanismus eines Lasers mit äußerem Spiegel ist in einfacher Weise so zu deuten, daß im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ nur ein Bruchteil $q\, \xi\, \mathrm{d}t$ aller im Resonator vorhandenen Quanten sich im aktiven Material befindet und stimulierte Emission anregen kann.

ξ errechnet sich aus den Laufzeiten im aktiven Material und im passiven Resonatorteil zu:

$$\xi = \frac{l\,\eta}{L + l(\eta - 1)}\,. \tag{7}$$

Dabei ist η der Brechungsindex des aktiven Materials gegen das Außenmedium.

Unter Beibehaltung von t_c als mittlerer Verweilzeit der Quanten im aktiven Material ergeben sich die modifizierten Schwingungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = W - 2\, B_s\, n\, q\, \xi\,, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = B_s\, n\, q\, \xi - \frac{q\,\xi}{t_c}\,. \tag{9}$$

Für die Gleichgewichtswerte ergibt sich

$$n_0 = 1/B_s\, t_c \quad \text{unabhängig von } \xi\,, \tag{10}$$

$$q_0 = W\, t_c/2\, \xi\,; \tag{11}$$

daraus folgt, daß die Zahl der Quanten im aktiven Material $q_0\,\xi$ unabhängig von der Länge des passiven Resonatorteils ist.

Die Relaxationsparameter ergeben sich zu

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{W\,B_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \tag{12}$$

$$t_0 = \frac{2}{W\,B_s\,t_c}. \tag{13}$$

Die Relaxationsperiode wächst in Übereinstimmung mit den Experimenten von GÜRS [7] für $L \gg l(\eta-1)$ mit der Wurzel aus der Resonatorlänge. Die Dämpfungszeit ist, ebenso wie die Schwellpumprate der Inversion n_0/τ, von der Resonatorlänge unabhängig.

Durch die Wirkung des passiven Quantenspeichers wird auch das Relaxationsverhalten von Multi-Mode-Lasern träger und stabiler gegen Störungen. Das wirkt sich besonders auffallend bei Experimenten mit Rubin-Lasern vom ebenen FABRY-PEROT-Typ aus, bei denen die Relaxationsimpulse mit wachsendem Abstand der äußeren Spiegel immer regelmäßiger werden [8, 10].

4. Berücksichtigung ungleichmäßiger Inversion

In den gebräuchlichen Pumpanordnungen wird der Querschnitt des Lasermaterials normalerweise ungleichmäßig stark gepumpt und nur in einem Bruchteil des Materialquerschnitts treten Schwingungen auf. In polierten Rundstäben können Laserschwingungen in der Stabmitte sogar schon auftreten, wenn die Inversion des ganzen Stabes noch negativ ist. Wir wollen untersuchen, wie in einem solchen Beispiel der volumenabhängige EINSTEIN-Koeffizient zu berechnen ist. Wir nehmen dabei einfacherweise an: $L=l$.

Für die Schwellbesetzung ist nach (3)

$$n_0 = \frac{1}{B_s\,t_c} = \frac{1}{B_s}\,\frac{(1-r)\,c}{l} \qquad (1-r \ll 1). \tag{14}$$

Dabei ist r der mittlere Reflexionskoeffizient der Spiegel. Andererseits gilt für die Schwelle die Rückkoppelbedingung:

$$e^{n_0'\,\sigma\,l} = 1 + (1-r). \tag{15}$$

Dabei ist σ in cm^2 der Wirkungsquerschnitt, n_0' in cm^{-3} die Inversion pro Raumeinheit. Gl. (15) gilt unabhängig vom Querschnitt des Resonators oder der lasernden Zone.

Im Volumen $l\,Q' = V'$ der lasernden Zone ist

$$n_0 = n_0'\,V' = n_0'\,l\,Q'. \tag{16}$$

Mit $n_0'\,l \ll 1$ folgt aus den Gln. (15) und (16)

$$n_0 = (1-r)\cdot Q'/\sigma. \tag{17}$$

Ein Vergleich von (14) und (17) zeigt

$$B_s = \frac{c\,\sigma}{l\,Q'} = \frac{c\,\sigma}{V'}. \tag{18}$$

Für die Berechnung des EINSTEIN-Koeffizienten ist also nur das Volumen der invertierten Zone zu berücksichtigen.

Da die Pumprate W sinnvollerweise ebenfalls nur auf das invertierte Volumen bezogen werden kann, in den Relaxationsparametern aber stets das Produkt $W\,B_s$ auftritt, folgt hieraus, daß das Relaxationsverhalten eines idealen Lasers vom Querschnitt der lasernden Zone unabhängig ist.

5. Vergleich mit anderen Deutungen

Von GÜRS wurde gezeigt [7], daß eine direkte Anwendung der DUNSMUIRschen Gleichungen die Abhängigkeit der Relaxationsperiode von der Resonatorlänge gut beschreibt, wenn man bei der Berechnung des EINSTEIN-Koeffizienten das Volumen des ganzen Resonators einsetzt. Das gibt in der Tat bis auf den Einfluß des Brechungsindex die gleiche Abhängigkeit von der Resonatorlänge. Diese Definition führt zunächst zu Schwierigkeiten mit dem diskutierten Gedankenexperiment und erfordert eine geeignete Festlegung für den Querschnitt des Resonators [11]. Bei ungleichmäßiger Verteilung des aktiven Materials im Resonatorvolulmen ist es natürlich grundsätzlich möglich, bei geeigneter Definition den EINSTEIN-Koeffizienten auf einen beliebigen Teil des Volumens zu beziehen. Der Vorteil unserer speziellen Definition liegt in ihrer einfachen modellmäßigen Anschaulichkeit.

MASTERS und WARD [10] haben versucht, die Abhängigkeit der Relaxationsperiode vom Spiegelabstand auf Änderungen der Beugungsverluste zurückzuführen. Dieser Effekt hat über eine Änderung der Verweilzeit t_c sicher einen gewissen Einfluß auf das Schwingungsverhalten, bewirkt jedoch nur eine Korrektur an den gewonnenen Relationen.

Der Verfasser dankt den Herren Dr. K. GÜRS, Dr. W. HEYWANG und Dr. K. EULER für anregende Diskussionen.

[10] J. MASTERS u. J. H. WARD, Proc. I.E.E.E. **51**, 221 [1963].

[11] K. GÜRS, in Vorbereitung.